



Exploitation Optimale d'une Ressource Renouvelable Forestière Soumise à un Environnement Stochastique

Mahdjoub^{a,*}, T. Ouaddah^a, E., Hakem^a, A.

^aUniversité Abou-Bekr Belkaïd, Tlemcen, B.P. 119, Tlemcen, Algérie.

Résumé

Dans le but de gérer durablement les ressources renouvelables forestières, une variante du modèle matriciel d'Leslie (Leslie, 1945) est proposée. Outre les paramètres démographiques les naissances et les déplacées, le modèle intègre le taux d'accroissement de la population et le taux d'exploitation. Dans le cas d'un environnement constant, lorsque la population atteint ses asymptotes d'équilibre, les mortalités restent que le taux d'exploitation augmentera avec le taux d'accroissement. Dans le cas d'un environnement stochastique, les mortalités restent que le taux d'exploitation optimale ne correspond pas nécessairement à la plus grande valeur du taux d'accroissement.

Mots clés : Modèle matriciel, taux d'accroissement stochastique, taux d'exploitation optimal, environnement stochastic.

Introduction

Généralité. Les derniers travaux utilisant le modèle matriciel sont réalisés, dans un premier temps, par Leslie (Leslie, 1945). Dans ce modèle, la population est décrite par des séries régulières $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$, éventuellement limitée à l'universel $\{N(t) \in \mathbb{N}\}$. La population est partitionnée en k classes d'âge (Figure 1) et deux types de paramètres démographiques sont définis: $\{P_{ij}\}_{i=1, \dots, k-1; j=1, \dots, k}$ représentent la probabilité de passage de la classe i à la classe j ; $\{A_{ij}\}_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, k}$ la mortalité de la classe i . A la dernière classe k est associée une probabilité de naissance P_N .

Le modèle de Leslie décrit la population à l'instant t , alors l'équation matricielle de Leslie s'écrit:

$$N(t+1) = A(t)N(t)$$

où

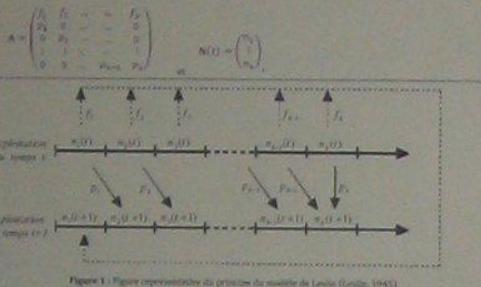


Figure 1: Diagramme représentant le principe du modèle de Leslie (Leslie, 1945).

Par la suite, Lotka (Lotka, 1925) avait généralisé ce modèle à deux populations d'âges. Les classes d'âge sont remplacées par les quatre étages de développement: naissance, croissance, adulte et mort. Application du modèle de Leslie aux populations forestières est essentiellement due aux travaux d'Usher (Usher, 1963; Usher, 1967/68; Usher, 1969a; Usher, 1969b; Usher, 1971; Usher et Williamson, 1970). Les arbres sont classés par ordre de puissance de leur croissance. Un facteur général, les mortalités, sont utilisées au moment de l'exploitation forestière. La durée de vie et entre deux mortalités successives dépend de la rapidité de la croissance des individus (et non pour l'instar général des êtres humains).

2. Le modèle

L'application du modèle de Leslie aux populations forestières est essentiellement dans les travaux d'Usher (Usher, 1963; Usher, 1967/68; Usher, 1969a; Usher, 1969b; Usher, 1971; Usher et Williamson, 1970). Les arbres sont classés par ordre de puissance de leur croissance. Un facteur général, les mortalités, sont utilisées au moment de l'exploitation forestière. La durée de vie et entre deux mortalités successives dépend de la rapidité de la croissance des individus (et non pour l'instar général des êtres humains).

2.1. Modèle

Le modèle du modèle de Leslie aux populations forestières est essentiellement dans les travaux d'Usher (Usher, 1963; Usher, 1967/68; Usher, 1969a; Usher, 1969b; Usher, 1971; Usher et Williamson, 1970).

Considérons une population forestière partitionnée en k classes de circonscriptions. Nous avons exploitations successives, soit instants t et $t+1$, qui perturbent la croissance.

2.1.1. Mortalité dans la classe i sans une probabilité P_M

2.1.2. Mortalité dans la classe i avec une probabilité $P_M(t)$

2.1.3. Mortalité totale et mortalité due à l'exploitation avec un taux

Une baisse de mortalité supposée est engagée par rapport au taux de mortalité pur (Figure 2).

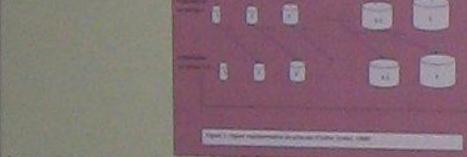


Figure 2: Variations du taux d'accroissement λ de la population en fonction du taux d'exploitation x dans le cas du modèle déterministe.

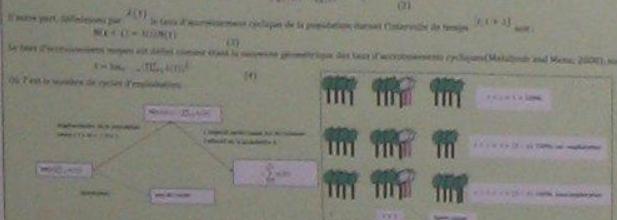


Figure 3: Diagramme représentant le principe du modèle de Leslie. Il montre une population initiale $N(0)$ et une population finale $N(t)$. Les transitions sont décomposées en mortalité et naissance.

Remarque: Nous supposons que durant un cycle d'exploitation, le nombre d'individus n'a pas été double ($x < 0.5$). Pour la même, nous avons utilisé un taux d'exploitation avec un pas de l'intervalle $[0, 0.5]$.

En utilisant Usher (1969b), nous démontrons que équations (1) et (2) l'équation scolaire d'accroissement (λ^{opt}) qui s'écrit :

$$\lambda^{opt} = \frac{4}{k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{k^2}} \right)$$

Équation (3) est le résultat obtenu du tout, lorsque nous prenons le taux de l'accroissement (λ) comme fonction de x pour l'exploitation dans le sens de l'exploitation. C'est dans le cas d'un environnement constant lorsque le taux d'accroissement stochastique qui nous donne

2. Bibliographie

- Bose, G.E.P. et Müller, M.J., 1958. A Note on the Generation of Random Normal Deviates. *Ann. Math. Stat.* 29, 610-611.
- Sutherland, J.P., 1965. The study of population growth in organisms grouped by stages. *Biometrika* 52, 1-18. doi:10.1093/biomet/52.1.1
- Leslie, P.H., 1945. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* 33, 183-212. doi:10.2307/2332297
- Leslie, P.H., 1948. Some further notes on the use of matrices in population mathematics. *Biometrika* 35, 213-245.
- Mahdjoub, T. and Merouane, F., 2008. Prolonged disease: a trait increasing invasion speed? *Journal of Theoretical Biology* 251, 317-320. doi:10.1016/j.jtbi.2008.01.002
- Merouane, F. and Thoms, W.W., 2009. A simple method for generating gamma variables. *ACM Transactions on Mathematical Software* 35, 163-172. doi:10.1145/1558107.1558116
- Merouane, M. and Nishimura, T., 1999. Merouane, Toshiaki: A k -D-Dimensionally Exponentiated Uniform Function: Random Number Generation. *ACM Transactions on Mathematical Software* 25, 3-10. doi:10.1145/272299.2722995

3. Modèle déterministe

3.1. Présentation

Les modèles déterministes correspondant au cas d'un environnement constant, sont associés des paramètres démographiques constants du tableau (1). Quant le pays passe à un état d'équilibre $E \rightarrow E^*$, le taux d'accroissement cyclique λ^{opt} associé avec le taux d'accroissement de la population λ , défini avec comme élément la plus grande valeur propre de la matrice de l'équation (4), soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \bar{A}$$

Probabilités de passage P_{ij} de i à j (en %)	Probabilités de naissance P_N (en %)	Taux d'exploitation λ (en %)
$P_{11} = 0.95$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$
$P_{12} = 0.05$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$
$P_{21} = 0.05$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$
$P_{22} = 0.95$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$
$P_{31} = 0.05$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$
$P_{32} = 0.05$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$
$P_{33} = 0.95$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$
$P_{41} = 0.05$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$
$P_{42} = 0.05$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$
$P_{43} = 0.05$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$
$P_{44} = 0.95$	$P_N = 0.05$	$\lambda = 0$

Tableau 1: Tableau de probabilités de passage et de mortalité. Ces probabilités sont constantes dans le cas d'un environnement constant. Elles sont fixées pour être à peu près égales. Ces deux dernières dépendent des conditions de l'environnement. Elles sont des variables utilisées dans notre modèle.

3.2. Équation de la mortalité $M(t)$ de probabilités $A(t)$ dans le cas d'un environnement constant

3.3. Équation de la mortalité $M(t)$ de probabilités $A(t)$ dans le cas d'un environnement stochastique

La convergence de la méthode itérative de Horner-Raphson, basée sur le ratio des termes $\lambda_{n+1} - \lambda_n = \{f(A_n)/f'(A_n)\}$ dépend en partie du choix de la matrice initiale A_0 . L'étude dans ce cas sera faite plus tard.

3.4. Équation de la mortalité $M(t)$ de probabilités $A(t)$ dans le cas d'un environnement stochastique

La mortalité $M(t)$ dans le cas d'un environnement stochastique est donnée par la formule $M(t) = \lambda^{opt} e^{-\lambda^{opt} t}$. La mortalité moyenne M est calculée à $t = 10^3$ ans. Les variations du taux d'accroissement λ dans le cas d'un environnement stochastique sont représentées dans la Figure 2.

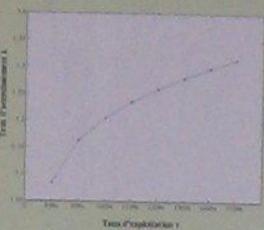


Figure 2: Variations du taux d'accroissement λ de la population en fonction du taux d'exploitation x dans le cas du modèle déterministe.

4. Modèle stochastique

4.1 Définition du modèle et description de la stochasticité

L'équation (3) pour, regarder les différentes variantes selonnes du tableau 1 détermine le modèle stochastique. Les probabilités de passage P_{ij} sont classées comme étant des variables aléatoires distribuées suivant la loi delta caractérisée par la fonction densité de probabilité:

$$f_{ij}(x) = \delta(x - x_{ij})$$

de manière $f_{ij}(x_{ij}) = 1$ et $f_{ij}(x) = 0$ pour tous les autres x . Il est naturel de supposer que les probabilités de passage entre les différentes classes de circonscriptions sont constantes entre elles et ayant une même variance, soit $\text{Var}[x_{ij}] = \sigma^2$. La même condition est posée sur les probabilités de mort, puisque $f_{ii}(x) = 1 - f_{ii}(x_{ii})$ et $f_{ii}(x) = 0$ pour tous les autres x . Les distributions mathématiques de la loi Beta sont basées sur l'algorithme développé par Marsaglia et Tsang (Marsaglia et Tsang, 2000). Le générateur aléatoire de la loi normale est basé sur la méthode de Box-Muller (Box and Muller, 1958) qui transforme la distribution uniforme sur $[0, 1]$ en distribution normale centrée réduite. Les valeurs aléatoires sur $[0, 1]$ sont générées en utilisant l'algorithme de Marsaglia-Tsang (Marsaglia et Tsang, 1998).

Par ailleurs, le stade aléatoire de l'ensemble des trois variables ($x_{ij}, i = 1, \dots, k$ et x_{ii}) pourra être déterminé par l'équation (4) qui sera appliquée une fois pour chaque trajectoire.

4.2 Évolution de l'exploitation

Lors du calcul du taux d'accroissement $\lambda^{opt} = \lambda^{opt}(x)$, associé à la trajectoire $\{x\}$, si le taux d'accroissement cyclique λ^{opt} sera > 0 , alors la population devra être exploitée.

4.3 Convergence de la mortalité stochastique

Comme dans le modèle déterministe, la méthode itérative de Newton-Raphson pour déterminer lors de la résolution de l'équation (5). Si pour une trajectoire donnée $\{x\}$ et pour un cycle donné $\{x\}$, la mortalité ne diminue pas avec relation à λ^{opt} après 20 itérations, le λ^{opt} ne sera pas calculé et pour constituer il y a lieu de plus faire le calcul du taux d'accroissement λ^{opt} associé à la trajectoire.

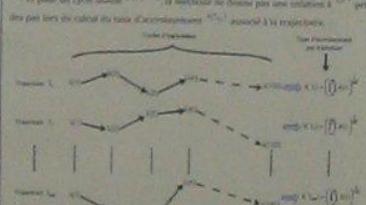


Figure 3: Figure représentant des principes du taux d'accroissement de la population dans le cas du modèle stochastique.

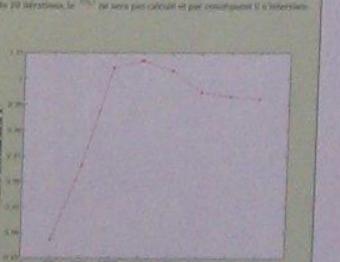


Figure 4: Variations du taux d'accroissement λ de la population en fonction du taux d'exploitation x dans le cas du modèle stochastique.

5. Conclusion

Les résultats montrent que dans le cas déterministe, en fonction d'un taux d'accroissement de plus grand pour pouvoir exploiter, cela peut être à des taux de plus élevés, alors que pour le cas stochastique, cela peut être, pour un taux d'exploitation variant de 0% à 57%, et un taux d'exploitation se rapprocher d'un taux de croissance de moins en moins important, il possible montrer, aussi qu'il est plus intéressant d'exploiter pour 1,07% que d'exploiter régulièrement à 100%.

Author M.B., 1966. A matrix approach to the management of renewable resources, with special reference to selection forests. *J. Appl. Ecol.* 3, 355-367.

Author M.B., 1969a. A structure for selection forests. *Symp. 47-6-8*.

Author M.B., 1969b. A matrix approach to the management of renewable resources, with special reference to selection forest extensions. *J. Appl. Ecol.* 6, 347-349.

Author M.B., 1971. Developments in the Leslie matrix model. In: Jeffery, J.N. (Ed.), *Mathematical Models in Biology*. Symposium of the British Ecological Society.

Author M.B., and Williamson, M.J., 1970. A determinate matrix model for handling the birth, death and migration processes of sparsely distributed populations. *Biometrika* 57, 1-12.