

Exploitation optimale d'une ressource renouvelable forestière soumise à un environnement stochastique

Mahdjoub^a, T., Ouaddah, E. & Hakem, A.

Université Abou-Bekr Belkaïd, Tlemcen, B.P. 119, Tlemcen, Algérie.

^aEmail : tew.mahdjoub@mail.univ-tlemcen.dz

Résumé : Dans le but d'une gestion optimale et durable des ressources renouvelables forestières, une variante du modèle matriciel d'Usher (Usher, 1969a) est proposée. Outre les paramètres démographiques de survie et de régénération, le modèle intègre le taux d'accroissement de la population λ et le taux d'exploitation τ . Dans le cas d'un environnement constant, lorsque la population atteint ses dynamiques d'équilibre, le taux d'exploitation augmente avec le taux d'accroissement. Dans le cas d'un environnement stochastique, les simulations montrent que le taux d'exploitation optimale ne correspond pas nécessairement à la plus grande valeur du taux d'accroissement.

Mots clés : Modèle matriciel, taux d'accroissement stochastique, taux d'exploitation optimal, environnement stochastique.

Abstract: In the aim of an optimal and durable management of the renewable forest resources, an alternative to Usher matrix model (Usher, 1969a) is proposed. In addition to the demographic parameters of survival and regeneration, the model integrates the population growth rate λ and the exploitation rate τ . In the case of a constant environment, when the population reaches its equilibrium dynamics, the exploitation rate increases with the growth rate. In the case of a stochastic environment, simulations show that the optimal exploitation rate does not correspond necessarily to the greatest value of the growth rate.

Key words: Matrix model, stochastic growth rate, optimal exploitation rate, stochastic environment.

خلاصة : بهدف الإدارة المثلى للموارد المتجددة للغابات ، يقترح بديلاً لنموذج المصفوفة لاشير (Usher, 1969a). بالإضافة إلى المعايير الديمغرافية للبقاء على قيد الحياة والتجديد ، يجمع هذا النموذج بين معدل النمو السكان λ ومعدل الاستغلال τ . في حالة وجود بيئة ثابتة ، وعندما يصل عدد السكان إلى ديناميكيات التوازن ، فإن معدل الاستغلال يزداد مع زيادة معدل النمو. في حالة وجود بيئة العشوائية ، تبين الحسابات أن معدل الاستغلال الأمثل لا يتطابق بالضرورة مع أكبر قيمة لمعدل النمو.

الكلمات الرئيسية : نموذج المصفوفة، معدل النمو العشوائي، معدل الاستغلال الأمثل، البيئة العشوائية

Introduction

La forêt est une source de richesse naturelle à fort impact socio-économique. Dans le but de pérenniser son exploitation, beaucoup de travaux se sont focalisés sur l'étude des dynamiques d'une population forestière. Ces études de prédiction se basent essentiellement sur la compréhension des phénomènes biologiques liés à la croissance, la mortalité et la régénération des individus qui seront par la suite paramétrés puis intégrés dans des modèles mathématiques.

Le modèle matriciel de Leslie est un des premiers outils mathématiques utilisé pour la détermination du taux d'accroissement d'une population (Leslie, 1945; Leslie, 1948).

Dans ce modèle, la population est inventoriée à intervalles de temps réguliers $[t, t + \Delta t]$, souvent ramené à l'intervalle $[t, t + 1]$. La population est partitionnée en k classes d'âge (figure 1) et deux types de paramètres démographiques sont définis : (1) p_i ($i=1, \dots, k-1$) représentant la probabilité de passage de la classe i à la classe $i+1$ et (2) f_i ($i=1, \dots, k$) la fécondité de la classe i . A la dernière classe k est associée une probabilité de non passage p_k . Si $\mathbf{N}(t)$ est le vecteur d'état décrivant la population à l'instant t , alors l'équation matricielle de Leslie s'écrit :

$$\mathbf{N}(t + 1) = \mathbf{A} \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

Où :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & \dots & f_k \\ p_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & p_k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}(t) = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix}_t$$

Par la suite, Lefkovitch (Lefkovitch, 1965) avait généralisé ce modèle à des populations d'insectes. Les classes d'âge ont été remplacées par les quatre stades de développement : œuf, larve, pupe et adulte.

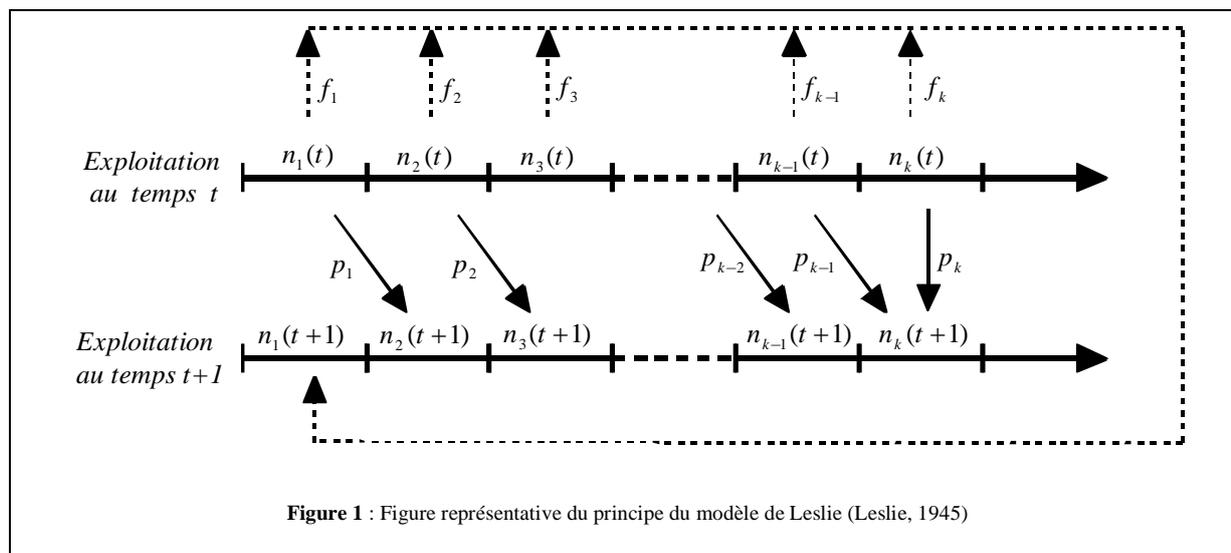


Figure 1 : Figure représentative du principe du modèle de Leslie (Leslie, 1945)

1-Matériel et méthodes

L'application du modèle de Leslie aux populations forestières est essentiellement due aux travaux d'Usher (Usher, 1966; Usher, 1967/68; Usher, 1969a; Usher, 1969b; Usher, 1971; Usher and Williamson, 1970). Les arbres sont classés par ordre de grandeur de leur circonférence. De façon générale, les inventaires sont réalisés au moment de l'exploitation forestière. La durée de temps entre deux inventaires successifs dépend de la rapidité de la croissance des individus (6 ans pour *Pinus sylvestris* en Ecosse).

1.1-Construction du modèle

Considérons une population forestière partitionnée en k classes de circonférences. Entre deux exploitations successives, aux instants t et $t+1$, un arbre de la classe i peut : (1) soit rester dans la classe i avec une probabilité $q_i(t)$, (2) soit passer à la classe supérieure $i+1$ avec une probabilité $p_i(t)$, (3) soit mourir (coupe ou mort naturelle) et entraîner une régénération avec un taux $f_i(t)$. Nous supposons par la suite que le taux de mortalité naturelle est très faible devant le taux de mortalité par coupe et que par conséquent est un taux qui dépend essentiellement du nombre d'arbres exploités.

D'autre part, définissons par $\lambda(t)$ le taux d'accroissement cyclique de la population durant l'intervalle de temps $[t, t + 1]$ soit :

$$\mathbf{N}(t + 1) = \lambda(t)\mathbf{N}(t) \quad (2)$$

Le taux d'accroissement moyen est défini comme étant la moyenne géométrique des taux d'accroissements cycliques (Mahdjoub and Menu, 2008), soit :

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow +\infty} (\prod_{t=1}^T \lambda(t))^{1/T} \quad (3)$$

où T est le nombre de cycles d'exploitation.

Si le nombre d'arbres augmente de $\sum_{i=1}^k N_i(t)$ à $\lambda(t) \sum_{i=1}^k N_i(t)$ entre t et $t+1$ et pour ramener cet accroissement à $x \sum_{i=1}^k N_i(t)$ alors il faut exploiter, à $t+1$, $(\lambda(t) - x) \sum_{i=1}^k N_i(t)$ arbres. Notons, à ce niveau, que si $x = 1$ alors tout le surplus d'individus produit est exploité. Nous dirons alors que le taux d'exploitation τ est égal à 100%. Si $x < 1$, la population est sur-exploitée et dans ce cas $\tau = (2 - x) \cdot 100\%$. Enfin, s'il y a une sous-exploitation et le nombre d'individus à $t+1$ est supérieur au nombre d'individus à t , alors $x > 1$. Nous supposons que durant un cycle d'exploitation, le nombre d'individus ne peut pas doubler ($x < 2$). Par la suite, nous ferons varier ce taux d'exploitation avec un pas $\Delta\tau = 10\%$ dans l'intervalle [80% – 150%].

Avec une exploitation identique à toutes les classes de la population, le modèle matriciel s'écrit :

$$\mathbf{N}(t+1) = \begin{pmatrix} q_1(t) + f_1(t)(\lambda(t) - x) & f_2(t)(\lambda(t) - x) & \dots & f_k(t)(\lambda(t) - x) \\ p_1(t) & q_2(t) & \dots & 0 \\ 0 & p_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_{k-1}(t) & q_k(t) \end{pmatrix} \mathbf{N}(t) \quad (4)$$

En suivant Usher (Usher, 1969a), nous déduisons des équations (2) et (4) l'équation scalaire d'inconnue $\lambda(t)$ qui s'écrit :

$$f[\lambda(t)] = q_1(t) + f_1(t)(\lambda(t) - x) - \lambda(t) + \sum_{i=2}^{k-1} f_i(t)(\lambda(t) - x) \frac{p_1(t)}{p_i(t)} \prod_{j=1}^i \left(\frac{p_j(t)}{\lambda(t) - q_j(t)} \right) + f_k(t)(\lambda(t) - x) \frac{p_1(t)}{p_k(t)} \prod_{j=1}^k \left(\frac{p_j(t)}{\lambda(t) - q_j(t)} \right) = 0 \quad (5)$$

L'équation (5) est le résultat essentiel de cette section car elle nous permet le calcul du taux d'accroissement cyclique $\lambda(t)$ en fonction de x et par conséquent en fonction du taux d'exploitation τ et ceci dans le cas d'un environnement constant ou dans le cas d'un environnement stochastique que nous désignerons par la suite, sous l'appellation respective de « modèle déterministe » et « modèle stochastique ».

1.2-Modèle déterministe

1.2.1-Définition

Au modèle déterministe correspondant au cas d'un environnement constant, sont associés des paramètres démographiques constants du tableau (1). Quand la population atteint son état d'équilibre ($t \rightarrow +\infty$) le taux d'accroissement cyclique $\lambda(t)$ coïncide avec le taux d'accroissement de la population λ , défini aussi comme étant la plus grande valeur propre de la matrice de l'équation (4), soit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \lambda \quad (6)$$

Tableau 1 : Valeurs des différents paramètres démographiques de l'espèce *Pinus sylvestris* à Corroux en Ecosse, dans le cas où 6 classes de circonférences sont considérées. Le cycle d'exploitation de cette forêt est de 6 ans. Dans le cas du modèle déterministe ces paramètres sont constants. Dans le cas du modèle stochastique, ils sont des variables aléatoires distribués comme indiqué.

Probabilités de passage p_i de la classe i à $i+1$ ($i=1, \dots, 5$)		Probabilités de non passage q_i . ($i=1, \dots, 6$)		Taux de régénération f_i ($i=1, \dots, 6$)	
Modèle déterministe	Modèle stochastique	Modèle déterministe	Modèle stochastique	Modèle déterministe	Modèle stochastique
$p_1 = 0.28$	$p_i(t)=v.a$ de fonction densité de probabilité la loi $B(x; \eta, \mu)^1$	$q_1 = 0.72$	$q_i(t)=v.a$ de fonction densité de probabilité la loi $B(x; \eta, \mu)^1$	$f_1 = 0.00$	$f_i(t)=v.a$ de fonction densité de probabilité la loi $N(f_i, Var[f_i(t)])^2$
$p_2 = 0.31$		$q_2 = 0.69$		$f_2 = 0.00$	
$p_3 = 0.25$		$q_3 = 0.75$		$f_3 = 0.00$	
$p_4 = 0.23$		$q_4 = 0.77$		$f_4 = 3.60$	
$p_5 = 0.37$		$q_5 = 0.63$		$f_5 = 5.10$	
		$q_6 = 0.00$		$f_6 = 7.50$	

⁽¹⁾ écriture de la distribution Bêta de paramètres η et μ définis dans la section 4.1.

⁽²⁾ écriture de la distribution normale de moyenne f_i et de variance $Var[f_i(t)]$ (voir section 4.1.).

1.2.2-Existence et unicité

L'existence et l'unicité de la valeur de λ comme solution de l'équation (5) ont été déjà démontré par Usher (Usher, 1969a) en étudiant les variations de la fonction $f(\lambda)$ ainsi que sa dérivée $f'(\lambda)$.

1.2.3-Condition initiale et convergence de la méthode de Newton-Raphson

La convergence de la méthode itérative de Newton-Raphson, basée sur le calcul des itérations $\lambda_{n+1} = \lambda_n - [f(\lambda_n)/f'(\lambda_n)]$, dépend en partie du choix de la valeur initiale λ_0 (choisie dans ce cas telle que $\lambda_0 = 1.1$) Si la méthode diverge, un autre choix de la condition initiale sera considéré. La valeur numérique de λ sera calculée à 10^{-5} près.

1.3-Modèle stochastique

1.3.1-Définition du modèle et description de la stochasticité

L'équation (5) avec, en regard, les différentes variables aléatoires du tableau 1 définissent le modèle stochastique. Les probabilités de passage $p_i(t)$ et les probabilités de non passage $q_i(t)$ sont choisies comme étant des variables aléatoires distribuées suivant la loi Beta caractérisée par la fonction densité de probabilité :

$$B(x; \eta, \mu) = x^{\eta-1}(1-x)^{\mu-1} / \int_0^1 u^{\eta-1}(1-u)^{\mu-1} du \quad (7)$$

de moyenne $E(.) = \eta/(\eta + \mu)$ et de variance $Var(.) = \eta\mu/[(\eta + \mu)^2(\eta + \mu + 1)]$. Les valeurs moyennes de ces distributions sont choisies comme étant les valeurs moyennes du modèle déterministe

soit $E[p_i(t)] = p_i$ et $E[q_i(t)] = q_i$. En outre, il est naturel de supposer que les probabilités de passage entre les différentes classes de circonférences soient corrélées entre elles et aient une même variance, soit $Var[p_i(t)] = 16$, pour $i = 1, \dots, 5$. La même condition est posée sur les probabilités de non passage, soit $Var[q_i(t)] = 16$ pour $i = 1, \dots, 6$. Les simulations numériques de la loi Beta sont basées sur l'algorithme développé par Marsaglia et Tsang (Marsaglia and Tsang, 2000).

Les taux de régénération $f_i(t)$ pour $i = 1, \dots, 6$, sont supposés distribués suivant une loi normale de moyenne la valeur du modèle déterministe $E[f_i(t)] = f_i$ et de variances égales $Var[f_i(t)] = 16$ pour $i = 1, \dots, 6$. Le générateur aléatoire de la loi normale est basé sur la méthode de Box-Muller (Box and Muller, 1958) qui transforme la distribution uniforme sur $[0,1]$ en une distribution normale centrée réduite. Les valeurs aléatoires sur $[0,1]$ sont générées suivant l'algorithme de Mersenne-Twister (Matsumoto and Nishimura, 1998)

Par la suite, le tirage aléatoire de l'ensemble des trois vecteurs $T_k = \{p_i(t), q_j(t), f_j(t); i = 1, \dots, 5; j = 1, \dots, 6; t = 1, \dots, 100, k = 1, \dots, 100$, sera appelé une trajectoire simple (Tuljapurkar, 1997) qui sera caractérisée par son taux d'accroissement stochastique $\lambda(T_k) = \left(\prod_{t=1}^{100} \lambda(t)\right)^{\frac{1}{100}}$ (figure 2). Le taux d'accroissement moyen sera la moyenne géométrique des d'aux d'accroissement de chaque trajectoire.

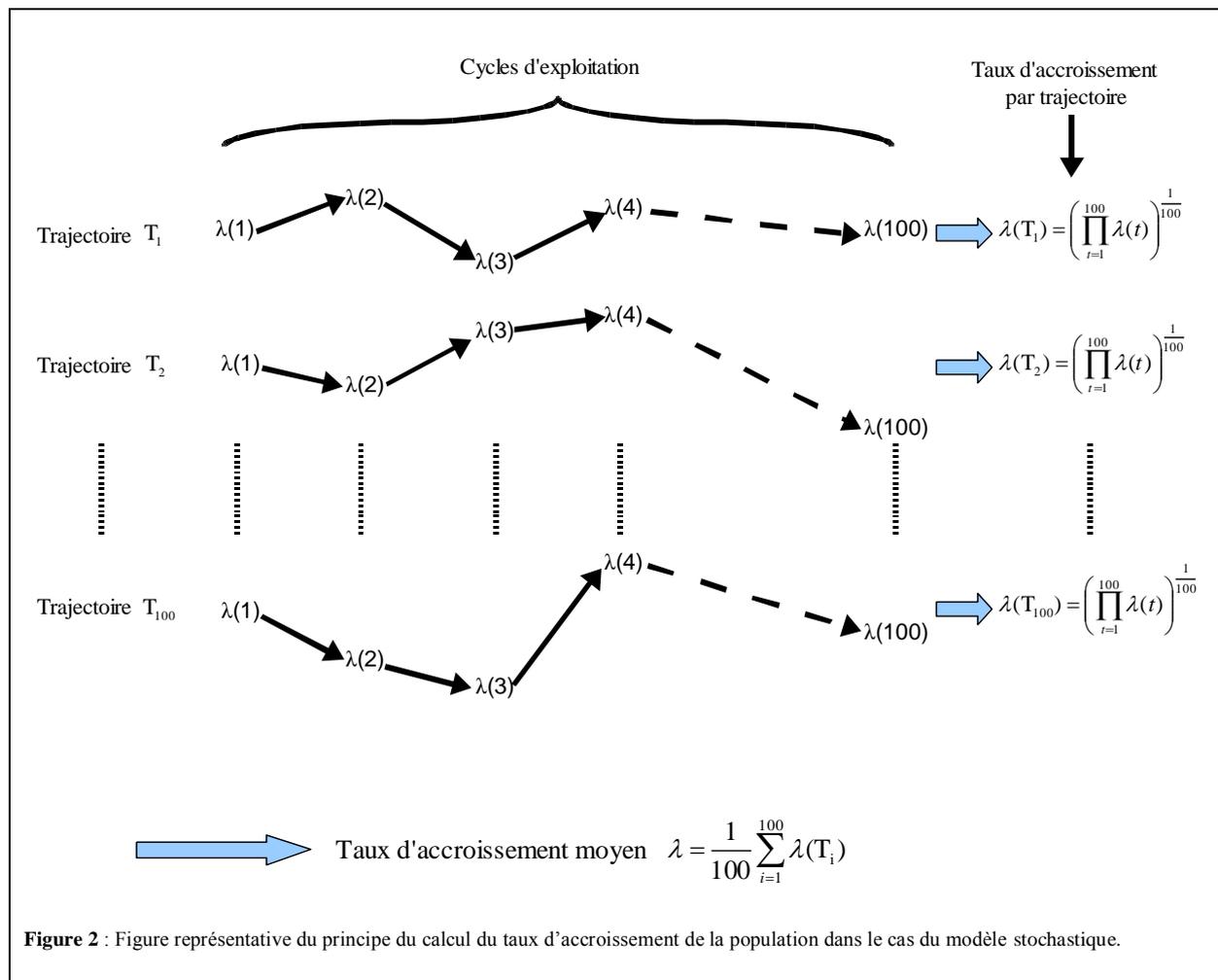


Figure 2 : Figure représentative du principe du calcul du taux d'accroissement de la population dans le cas du modèle stochastique.

1.3.2-Condition d'exploitation

Lors du calcul du taux d'accroissement $\lambda(T_{k_0})$, $1 \leq k_0 \leq 100$, associé à la trajectoire T_{k_0} , si le taux d'accroissement du cycle $[t_0, t_0 + 1]$ sera tel que $\lambda(t_0) < 1$ alors la population forestière ne sera pas exploitée le cycle suivant $[t_0 + 1, t_0 + 2]$.

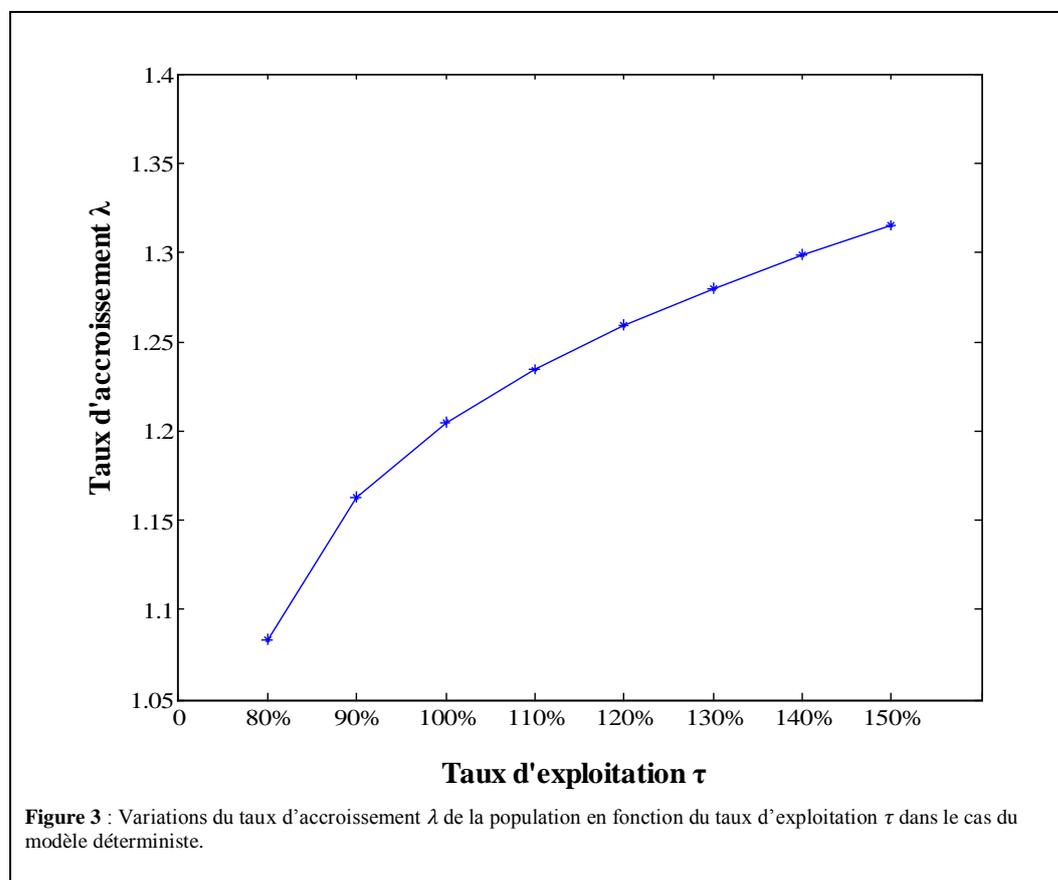
1.3.3-Convergence de la méthode numérique

Comme dans le modèle déterministe, la méthode numérique de Newton-Raphson peut diverger lors de la résolution de l'équation (5). Si pour une trajectoire donnée T_{k_0} et pour un cycle donné $[t_0, t_0 + 1]$, la méthode ne donne pas une solution à 10^{-5} près après 20 itérations, le $\lambda(t_0)$ ne sera pas calculé et par conséquent il n'interviendra pas lors du calcul du taux d'accroissement $\lambda(T_{k_0})$ associé à la trajectoire.

2-Résultats et discussion

Les variations du taux d'accroissement λ en fonction du taux d'exploitation τ dans le cas du modèle déterministe sont représentées dans la figure 3. Elles montrent qu'aux taux d'exploitation croissants correspondent des taux d'accroissement croissants.

Autrement dit, pour avoir un taux d'exploitation élevé il est nécessaire que l'accroissement de la ressource forestière soit élevé. Ce résultat naturel valide la déduction de l'équation (5).



Les résultats du modèle stochastique, plus réaliste, sont représentés dans la figure 4. Contrairement au modèle déterministe, le taux d'exploitation $\tau_{opt} = 110\%$ optimise le taux d'accroissement de la population forestière ($\lambda = 1.00714$). L'existence d'un taux optimal d'exploitation s'explique par le fait que des taux au dessous de ce taux optimal ne stimulent pas suffisamment la régénération naturelle tandis que les taux supérieurs correspondent à des taux de surexploitation. Une exploitation optimale serait donc de faire un compromis entre la maximisation de la régénération naturelle sans pour autant atteindre le seuil de la surexploitation.

Dans cette étude, l'optimalité de l'exploitation a été définie par rapport au taux d'accroissement de la ressource forestière qui est souvent considéré comme mesure de fitness biologique. Il reste tout autant intéressant d'utiliser une autre mesure telle que la probabilité d'exploitation et de comparer les résultats obtenus par les deux méthodes.

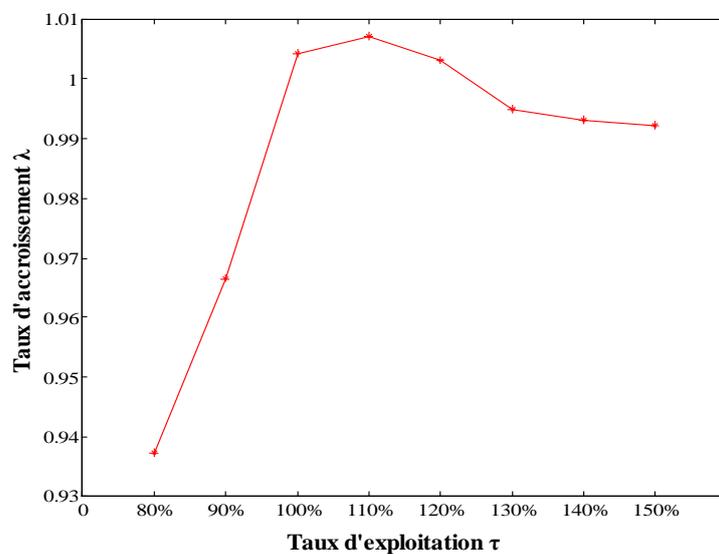


Figure 4 : Variations du taux d'accroissement λ de la population en fonction du taux d'exploitation τ dans le cas du modèle stochastique.

Références bibliographiques

Box, G.E.P., and Muller, M.E., 1958. A Note on the Generation of Random Normal Deviates. *Ann. Math. Stat.* 29, 610-611.

Lefkovich, L.P., 1965. The study of population growth in organisms grouped by stages. *Biometrics* 21, 1-18., [doi:10.2307/2528348](https://doi.org/10.2307/2528348).

Leslie, P.H., 1945. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* 33, 183-212., [doi:10.2307/2332297](https://doi.org/10.2307/2332297).

Leslie, P.H., 1948. Some further notes on the use of matrices in population mathematics. *Biometrika* 35, 213-245.

Mahdjoub, T., and Menu, F., 2008. Prolonged diapause: a trait increasing invasion speed? *Journal of Theoretical Biology* 251, 317-330., [doi:10.1016/j.jtbi.2007.12.002](https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2007.12.002).

Marsaglia, G., and Tsang, W.W., 2000. A simple method for generating gamma variables. *ACM Transactions on Mathematical Software* 26, 363-372., [doi:10.1145/358407.358414](https://doi.org/10.1145/358407.358414).

Matsumoto, M., and Nishimura, T., 1998. Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* 8, 3-30., [doi:10.1145/272991.272995](https://doi.org/10.1145/272991.272995).

Tuljapurkar, S.D., 1997. Stochastic matrix models. S.D. Tuljapurkar and H.Caswell eds. *Structured-population models in marine, terrestrial and freshwater systems*. Chapman and Hall, New-York, 59-82.

Usher, M.B., 1966. A matrix approach to the management of renewable resources, with special reference to selection forests. *J. Appl. Ecol.* 3, 355-367.

Usher, M.B., 1967/68. A structure for selection forests. *Sylva* 47, 6-8.

Usher, M.B., 1969a. A matrix model for forest management. *Biometrics* 25, 309-315.

Usher, M.B., 1969b. A matrix approach to the management of renewable resources, with special reference to selection forest-two extensions. *J. Appl. Ecol.* 6, 347-348.